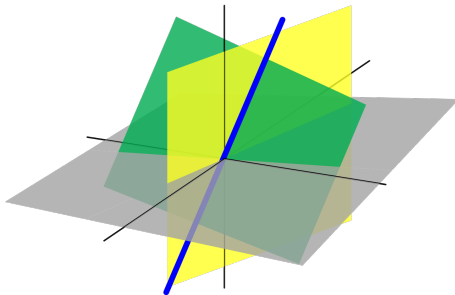


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 26 SEPTEMBRE

Jérôme Scherer



1.8 APPLICATIONS LINÉAIRES

Soient V et W des espaces vectoriels. On considère une transformation (application) $T : V \rightarrow W$. Elle associe à tout vecteur v de V un vecteur Tv de W .

DÉFINITION

L'application T est **linéaire** si, pour tous u, v de V et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

❶ $T(u + v) = Tu + Tv$;

❷ $T(\alpha v) = \alpha(Tv)$.

Soit A une matrice $m \times n$. Alors la transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par la multiplication matricielle

$$\vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

est linéaire.

1.8.1 EXEMPLES

- ❶ L'application $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui projette $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- ❷ L'homothétie de rapport 3 dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$

- ❸ La symétrie d'axe Ox dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

1.8.2 PROPRIÉTÉS

PROPOSITION

Soit T une application linéaire. Alors $T: V \rightarrow W$

① $T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$;

② $T(\underset{V}{0}) = \underset{W}{0}$.

Preuve. On calcule sans réfléchir !

T préserve + T préserve l'action

$$T(\alpha u + \beta v) \stackrel{T \text{ préserve } +}{=} T(\alpha u) + T(\beta v) \stackrel{T \text{ préserve l'action}}{=} \alpha Tu + \beta Tv$$

et d'autre part

$0_{\mathbb{R}}$ est absorbant

$$T(\underset{V}{0}) \stackrel{\text{lin}}{=} T(\underset{\mathbb{R}}{0} \cdot \underset{V}{0}) = \underset{\mathbb{R}}{0} \cdot T(\underset{V}{0}) = \underset{W}{0}$$

Rem: Si $T(0) \neq 0$, T n'est pas linéaire. □

$$1) T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.8.3 AUTRES EXEMPLES

❶ $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ est linéaire.

❷ $T : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $T(p) = p(t)$ est linéaire.

$$T(p+q) = (p+q)(t) \stackrel{\substack{\text{de } \mathbb{P} \text{ de } + \\ \text{de } \mathbb{P}_n}}{=} p(t) + q(t) \stackrel{\substack{\text{de } \mathbb{P} \text{ de } T}}{=} T(p) + T(q)$$

$$T(\alpha \cdot p) = (\alpha \cdot p)(t) = \alpha \cdot p(t) = \alpha \cdot T(p)$$

❸ $T_\lambda : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_\lambda(p) = p(\lambda)$ est linéaire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En particulier l'évaluation en zéro est linéaire :

$$T_0(at^2 + bt + c) = c.$$

même preuve avec $t = \lambda$.

1.9 LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

SLOGAN

Toutes les applications linéaires sont représentées par des matrices.

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On choisit les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ils engendrent $\mathbb{R}^n$ puisque $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$. C'est la seule combinaison linéaire qui donne $\vec{x}$ car les $\vec{e}_i$ sont libres.

1.9.1 CONSTRUCTION DE LA MATRICE

SLOGAN

Si on connaît les vecteurs $T\vec{e}_i$, alors on connaît T .

On pose $\vec{a}_i = T\vec{e}_i$ et on forme la matrice $m \times n$

$$A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$$

Pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ on peut écrire

$$\begin{aligned} T\vec{x} &= T(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) && \text{par l'obs. précédente} \\ &= x_1 T\vec{e}_1 + \dots + x_n T\vec{e}_n && \text{par linéarité} \\ &= x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = A\vec{x} && \begin{array}{l} \text{car } T\vec{e}_i = \vec{a}_i \\ \text{def. du produit matriciel} \end{array} \end{aligned}$$

THÉORÈME

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Il existe alors une unique matrice A de taille $m \times n$ telle que $T\vec{x} = A\vec{x}$.

Si $v_1, \dots, v_R$ est libre et $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_R v_R$
alors c'est la seule combi lin qui donne v .

preuve. Si $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_R v_R$, alors

$$0 = v - v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_R v_R - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_R v_R$$

$\stackrel{\text{diff.}}{=} (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_R - \beta_R) v_R$
 comm

la famille étant libre $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_R - \beta_R = 0$

donc $\alpha_i = \beta_i \quad \forall 1 \leq i \leq R \quad \square$

1.9.2 EXEMPLES

SLOGAN

Les **colonnes** de la matrice de T sont les images des vecteurs $\vec{e}_i$.

Quelles sont toutes les applications linéaires $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Elles sont données par une matrice 1×1 , c'est-à-dire par un seul nombre réel a . Ici $\vec{e}_1 = (1)$ et ainsi $\text{sc } T(1) = a$

$$Tx = ax$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, la rotation d'axe Ox et d'angle 90° est linéaire. Quelle est sa matrice?

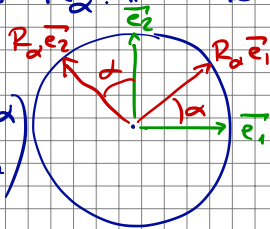
$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{or } T(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 \\ T(\vec{e}_2) &= \vec{e}_3 \\ T(\vec{e}_3) &= -\vec{e}_2 \end{aligned}$$

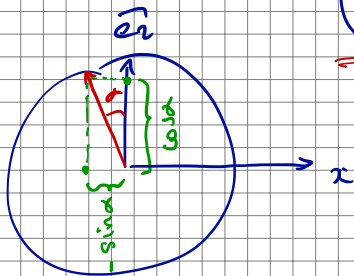
EXEMPLE : MATRICE DE ROTATION.

On cherche la matrice de la rotation $R_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
de centre $(0;0)$ et d'angle α

$$R_\alpha(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad R_\alpha(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$



La matrice de R_α est $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$



1.9.3 PROBLÈME D'EXISTENCE

DÉFINITION

Une application $T : V \rightarrow W$ est **surjective** si tout vecteur b de W est l'image d'au **moins** un vecteur de V .

En termes mathématiques. Pour tout $b \in W$, il existe $v \in V$ tel que $Tv = b$.

Lorsque $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire, représentée par la matrice A , cela signifie que le système

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

a toujours au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

1.9.4 PROBLÈME D'UNICITÉ

DÉFINITION

Une application $T : V \rightarrow W$ est **injective** si tout vecteur b de W est l'image d'au **plus** un vecteur de V .

En termes mathématiques. Si $Tv = b = Tw$, alors $v = w$.

Lorsque $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire, représentée par la matrice A , cela signifie que le système

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

est soit incompatible, soit admet une unique solution.

1.9.5 EXEMPLE

On étudie l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut savoir si T est surjective? injective?

$$\bullet T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \stackrel{\text{lin}}{=} T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } T \text{ n'est pas injective.}$$

$$\begin{aligned} \bullet T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= T\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \stackrel{\text{lin}}{=} x \cdot T(\vec{e}_1) + y \cdot T(\vec{e}_2) \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{distr}}{=} (x-y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$T \text{ n'est pas surjective car } \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} \neq T(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2.$$

1.9.6 CRITÈRE D'INJECTIVITÉ

THÉORÈME

Une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est injective si et seulement si la seule solution de $Tx = 0$ est $x = 0$.

Preuve. Si T est injective, il y a au plus un vecteur v tel que $Tv = b$ pour tout choix de vecteur b . C'est donc vrai en particulier pour $b = 0$!

Reste à voir : si $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$, alors T est injective.

REMARQUE

Dans la pratique c'est toujours ce critère que l'on vérifie pour montrer qu'une application **linéaire** est injective.

FIN DE LA PREUVE.

Soient $v, v' \in V$ tq $Tv = b = Tv'$. On doit montrer $v = v'$.

Alors $0 = b - b = Tv - Tv' \stackrel{T \text{ lin}}{=} T(v - v')$

Donc, par hypothèse, $v - v' = 0$. Ainsi $v = v'$. $\square$

1.9.7 CRITÈRES MATRICIELS

THÉORÈME

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A sa matrice. Alors

- 1 T est **surjective** si et seulement si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ (il y a un pivot dans chaque ligne de A) ;
- 2 T est **injective** si et seulement si les colonnes de A sont libres (il y a un pivot dans chaque colonne de A).

Preuve. On utilise deux fois le fait que $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$.

1. L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est toujours compatible si et seulement si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ (par définition).
2. L'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ a une solution unique si et seulement si les colonnes de A sont libres.



1.9.8 PROTOTYPES

Que peut-on dire des matrices suivantes, échelonnées et réduites :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A : Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^3$ (elles sont $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et $\vec{0}$), donc $A \cdot \vec{x}$ est surjective.
Elles ne sont pas libres, pas injective.

B : les colonnes n'engendrent pas $\mathbb{R}^4$, pas surjective.
_____ sont libres, injective.

1.9.8 UN EXEMPLE

On considère l'application $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par la formule

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 0 \\ x_1 - 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ❶ Est-elle linéaire ?
- ❷ Est-elle injective ?
- ❸ Est-elle surjective ?

RÉSOLUTION.

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{e}_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ① T est donc linéaire
- ② Les colonnes ne sont pas colinéaires, donc libres, T est injective
- ③ Il y a trop peu de colonnes pour engendrer $\mathbb{R}^4$, il manque des pivots dans les lignes, T n'est pas surjective.

1.9.8 EXEMPLE

On considère l'application $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par la formule

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ❶ Est-elle linéaire? ✓
- ❷ Est-elle injective? ✗
- ❸ Est-elle surjective? ✓

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

pivot dans chaque ligne
 $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

2.1.1 LES MATRICES : NOTATION

Soit A une matrice $m \times n$. Nous avons souvent noté ses colonnes $\vec{a}_j$ pour écrire

$$A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$$

Chaque colonne est un vecteur

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ si bien que } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On note aussi parfois simplement $A = (a_{ij})_{m \times n}$, ou même $A = (a_{ij})$ lorsque la taille de la matrice est claire.

2.1.1 LES MATRICES : TERMINOLOGIE

DÉFINITION

La **matrice nulle** est la matrice $(0)_{m \times n}$ dont tous les coefficients sont nuls. Une **matrice carrée** est une matrice de taille $n \times n$.

La **diagonale** d'une matrice A est constituée des coefficients *diagonaux* $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$. Une matrice carrée est **diagonale** si

$a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. C'est le cas de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOMME

Soient A et B deux matrices $m \times n$. Alors la somme $A + B$ est la matrice $(a_{ij} + b_{ij})$.

2.1.2 LA SOMME DE MATRICES

La somme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

n'a pas de sens ! Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉS DE L'ADDITION

- Ⓐ Commutativité : $A + B = B + A$;
- Ⓑ Associativité : $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- Ⓒ Matrice nulle : $A + (0) = A = (0) + A$;
- Ⓓ Opposé : La matrice $-A = (-a_{ij})$ est l'opposé de A .

2.1.3 L'ACTION

ACTION

Soit A une matrice $m \times n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors αA est la matrice (αa_{ij}) .

Exemple.
$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉS DE L'ACTION

(E) Distributivité I : $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(F) Distributivité II : $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(G) Compatibilité : $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

(H) Unité : $1 \cdot A = A$.

2.1.4 ESPACES VECTORIELS DE MATRICES

PROPOSITION

Les matrices de taille $m \times n$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ forment un espace vectoriel.

EXEMPLE

L'ensemble $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - d = 0 = c \right\}$ est un sous-espace de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- 1 la matrice nulle appartient à W ;
- 2 la somme est stable ;
- 3 l'action est stable.

PREUVE.

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \quad \text{car } \begin{matrix} 0-0=0=0 \\ a-d & c \end{matrix}$$
$$a=b=c=d=0$$

$$2. \text{ Si } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in W, \text{ alors } c=0=c' \\ A = \quad \quad \quad A' \quad \quad \quad a=d, a'=d'.$$

$$A + A' = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix}$$

appartient à W car le coeff $\nearrow$ est nul et sur la diagonale $a+a' = a+a'$.

3. I dem pour l'action.

□

2.1.5 LE PRODUIT MATRICIEL

Soit $A = (a_{ik})$ une matrice $m \times n$ et $B = (b_{kj})$ une matrice $n \times p$.

SLOGAN 1

On multiplie les matrices lignes par colonnes.

Le coefficient (i, j) de $A \cdot B$ est donc

$$(A \cdot B)_{ij} = (\underbrace{a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}}_{\text{ie ligne de A}}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \text{j}^{\text{e}} \text{ colonne de B} \end{matrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

On peut écrire cela grâce au produit "matrice fois vecteur" (1.4) :

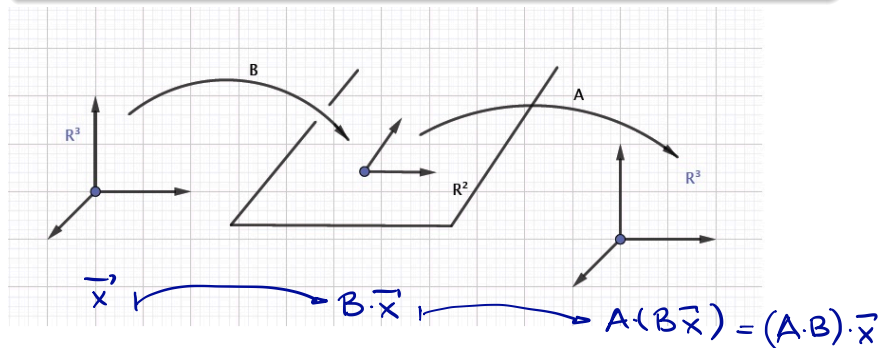
$$A \cdot B = A \cdot (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_p) = (A\vec{b}_1 \dots A\vec{b}_p)$$

de taille
 $m \times p$

2.1.5 PRODUIT ET COMPOSITION

SLOGAN 2

Le produit matriciel représente la composition des applications linéaires.



PREUVE.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & B\vec{x} & \longmapsto & A(B\vec{x}) \end{array}$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^p, B \in \Pi_{n \times p}(\mathbb{R}), A \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot (B \cdot \vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} A(x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_p \vec{b}_p)$$

de $B \cdot \vec{x}$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} x_1 A \vec{b}_1 + \dots + x_p \cdot A \vec{b}_p$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} (A \vec{b}_1 \dots A \vec{b}_p) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

de $\cdot$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (A \cdot B)(\vec{x}).$$

de $A \cdot B$

□